

基于高保真有限元模型失谐叶盘受迫响应的统计特性

张秉杰¹, 臧朝平¹, PETROV E P²

- (1. 南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016;
2. 苏塞克斯大学 工程与设计学院, 布莱顿 BN19QT)

摘 要: 采用极值理论分析失谐叶盘最大受迫响应的统计特性并应用于某压气机叶盘上。对失谐叶盘进行减缩建模,运用蒙特卡洛方法模拟响应计算,研究不同激励阶次下最大响应放大因子的分布特性。采用极值理论对最大响应放大因子分布进行统计学建模,以极大似然估计方法求解未知参数,进行分布拟合,并采用 K-S(Kolmogorov-Smirnov)检验方法检验各分布函数拟合的好坏程度。对某压气机叶盘进行失谐响应统计特性分析,对比了 7 种分布函数对最大响应放大因子的拟合效果,结果表明:极值分布、二参数威布尔分布、正态分布、对数正态分布和伽马分布拟合效果较差;常用的三参数威布尔分布不如广义极值分布的拟合效果好。因此,说明广义极值分布更能准确地描述失谐叶盘动力响应的统计特性。

关 键 词: 失谐叶盘; 最大响应; 蒙特卡洛; 统计特性; 极值理论

中图分类号: V232.3; O212.2

文献标志码: A

Statistical characteristics of forced response in mistuned bladed disks based on high-fidelity finite element model

ZHANG Bingjie¹, ZANG Chaoping¹, PETROV E P²

- (1. College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. College of Engineering and Design,
University of Sussex, Brighton BN19QT, United Kingdom)

Abstract: The extreme value theory was used to analyze the statistical characteristics of maximum forced response of the mistuned bladed disks, and applied to a compressor disk. The mistuning bladed disk was reduced and modeled. The Monte Carlo method was used to simulate the response calculation, and the distribution characteristics for the amplification factor of the maximum response under different engine order excitations were studied. The extreme value theory was used to model the maximum response distribution, and the maximum likelihood estimation method was introduced to get the unknown parameters. The K-S (Kolmogorov-Smirnov) test was employed to test the goodness of fit of different distribution functions. The statistical characteristics of the response of a compressor disk were analyzed. The fitting results of seven kinds of distribution functions for the amplification factor of the

收稿日期: 2017-12-07

基金项目: 国家自然科学基金(11372128); 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金(U1730129)

作者简介: 张秉杰(1992—),男,硕士生,主要从事结构强度与振动的研究。E-mail: zhangbingjie@nuaa.edu.cn

通讯作者: 臧朝平(1963—),男,教授、博士生导师,博士,主要从事结构动力学与测试方面的研究。E-mail: c.zang@nuaa.edu.cn

引用格式: 张秉杰,臧朝平,PETROV E P. 基于高保真有限元模型失谐叶盘受迫响应的统计特性[J]. 航空动力学报,2019,34(1): 135-141. ZHANG Bingjie, ZANG Chaoping, PETROV E P. Statistical characteristics of forced response in mistuned bladed disks based on high-fidelity finite element model[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(1): 135-141.

maximum response were compared. Results showed that the fitting effects of the extreme value distribution, two-parameter Weibull distribution, normal distribution, lognormal distribution and Gamma distribution were all poor; the fitting effect of the commonly used three-parameter Weibull distribution was not as good as that of the generalized extreme value distribution. Therefore, the generalized extreme value distribution can more accurately describe the statistical characteristics of the dynamic response of mistuned bladed disks.

Key words: mistuned bladed disk; maximum response; Monte Carlo; statistical characteristics; extreme value theory

航空发动机的叶盘结构在设计时,每个叶片是完全一致的,具有谐调特性。但是,由于加工误差、磨损、叶根接触以及叶片安装等诸多不确定因素,实际叶盘结构各扇区不可避免的存在一定的偏差,这种偏差称为失谐(mistuning)^[1]。虽然失谐量通常很小,但是叶盘结构对失谐非常敏感,极小的失谐可能会造成较大的模态振型局部化和振动传递局部化^[2-7],甚至使得叶片出现过早的高周疲劳(high cycle fatigue, HCF),从而影响发动机的使用寿命。通常,不同的失谐形式,叶片振动的最大幅值差别较大,有必要认识最大幅值的统计特性,尤其是最大振幅超过某一临界值后的统计特性。

早期,多采用集中参数模型代替叶盘结构,研究其受迫响应的最大响应幅值的统计特性。文献[6-8]提出了多种分析失谐叶片盘结构受迫响应的最大振幅统计特性的方法。假设输入参数为高斯分布,利用理论分析的方法对失谐叶盘进行响应求解并推导其概率密度分布函数,得出其分布符合正态分布^[8-9],但这种方法的准确性依赖于阻尼。Sinha^[10]还利用混沌多项式对失谐响应进行近似求解,并利用该多项式特性研究失谐响应的统计特性。Castanier 和 Pierre^[11], Mignolet 等^[12-13]提出最大响应分布符合三参数威布尔分布,然而, Sina^[14]利用神经网络方法研究表明只有在低耦合刚度下最大响应才符合三参数威布尔分布,耦合刚度较大时,最大响应并不符合三参数威布尔分布。

近年来,基于限元的减缩模型广泛应用于研究失谐叶盘的振动特性^[15-16],但该类模型却很少用于失谐响应统计特性的研究。Bladh 等^[17]用缩减模型对失谐响应统计特性估计表明三参数威布尔分布能够反应最大响应的分布。Chan 和 Ewins^[18]则用减缩模型对失谐响应最大响应放大因子的上边界和概率进行研究。

极值理论^[19]在降雨量,温度,寿命预测,风速^[20]等问题的统计特性研究上得到广泛应用。本文将极值理论应用到失谐叶盘最大响应的统计特性研究上。利用极值理论中 7 种分布函数对最大响应的分布进行分布函数建模,并采用极大似然估计求解未知参数。通过统计理论中假设检验的方法找出对最大响应分布描述最好的分布函数。还给出一系列数值计算结果,验证了理论的适用性和有效性。

1 失谐叶盘响应的统计学描述

1.1 失谐叶盘的响应与最大响应分析

考虑激励阶次(engine order, EO),失谐叶盘运动方程可以写成如下形式:

$$(\tilde{\mathbf{K}} + i\tilde{\mathbf{D}} - \omega^2\tilde{\mathbf{M}})\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \delta\mathbf{K}$, $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \delta\mathbf{D}$ 和 $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}$ 代表失谐叶盘结构的刚度、阻尼和质量矩阵。 $\mathbf{x}$ 和 ω 分别为稳态响应和激励频率。

失谐叶盘结构的模态特性可表示为

$$(\mathbf{K} + \delta\mathbf{K})\tilde{\Phi} = (\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})\tilde{\Phi}\tilde{\Lambda} \quad (2)$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 和 $\tilde{\Lambda}$ 为其对应的特征向量和特征矩阵。

叶盘结构为旋转件,在实际运转中,叶片所受到的气体尾流激励经 Fourier 分解,可以表示为不同阶次行波的叠加,即通常所说的阶次激励。阶次激励形式如下:

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{f}^s, e^{i\alpha k}\mathbf{f}^s, \dots, e^{i\alpha k(N_b-1)}\mathbf{f}^s\}^T \quad (3)$$

其中 $\mathbf{f}^s$ 为作用在扇区上的力, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = 2\pi/N_b$ 为扇区角, k 为激励阶次, N_b 为扇区数。直接对式(2)进行求解,需要对超大规模矩阵进行求逆运算,效率低。为此,将失谐叶盘振型 $\tilde{\Phi}$ 表示成谐调叶盘振型 Φ 的线性组合

$$\tilde{\Phi} = \Phi \mathbf{c} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{c}$ 为组合系数矩阵。将式(4)代入式(2),简化后可得

$$(\Lambda + \Phi^T \delta \mathbf{K} \Phi) \mathbf{c} = (\mathbf{I} + \Phi^T \delta \mathbf{M} \Phi) \mathbf{c} \tilde{\Lambda} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为谐调叶盘特征的矩阵。此时,求逆矩阵的维度仅取决于所选取得谐调叶盘的振型数目,大大降低了求逆矩阵的规模。为了减少 $\Phi^T \delta \mathbf{K} \Phi$ 与 $\Phi^T \delta \mathbf{M} \Phi$ 的运算规模,仅需在少量的“主节点”上进行计算。利用模态叠加法可求出频响函数 (frequency function response, FRF) 矩阵 $\mathbf{A}$ 和稳态响应 $\mathbf{x}$

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\Phi}_j^T \tilde{\Phi}_j}{(1 + i\tilde{\eta}_j)\tilde{\lambda}_j - \omega^2},$$

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\Phi}_j^T f}{(1 + i\tilde{\eta}_j)\tilde{\lambda}_j - \omega^2} \tilde{\Phi}_j \quad (6)$$

其中 $\tilde{\eta}_j$ 、 $\tilde{\lambda}_j$ 和 $\tilde{\Phi}_j$ 分别为第 j 阶模态对应的模态阻尼比,特征值和对应的特征向量。

叶盘有限元模型中的每个节点都做着复杂运动。复响应向量 $\mathbf{a}_j = \{a_j^x, a_j^y, a_j^z\}$ 包含振动的幅值和相位信息,并获得节点任意时刻的位移矢量。因此,在振动周期中,三维空间中的最大节点位移被确定为复响应矢量的最大长度

$$a_j^{\max} = \max_{0 \leq t \leq 2\pi/\omega} \|\mathbf{a}_j e^{i\omega t}\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_j^T \mathbf{a}_j + |\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j|)} \quad (7)$$

失谐叶盘在激振频率范围的最大响应为

$$a^{\max}(\mathbf{b}) = \max_{\omega \in [\omega^-, \omega^+]} \max_{j \in V} (a_j^{\max}) \quad (8)$$

其中 $a^{\max}(\mathbf{b})$ 为最大响应, V 为叶盘的体积, ω^- 和 ω^+ 分别为激振频率的上下边界。 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_b}\}^T$ 为一组失谐形式。

$$b_j^r = (f_j^r - f_0^r)/f_0^r \quad (9)$$

其中 r 为单个叶片某阶用来描述失谐的模式,这里为第 1 阶, f_j^r 和 f_0^r 分别为失谐叶片和谐调叶片的固有频率。

失谐叶盘在激振频率范围的最大响应放大因子为

$$a = \frac{a^{\max}(\mathbf{b})}{a^{\max}(0)} \quad (10)$$

其中 $a^{\max}(0)$ 为激振频率范围内谐调叶盘的最大响应。

1.2 最大响应的广义极值分布建模

在这里以广义极值 (generalized extreme value, GEV) 分布为例,假设最大响应放大因子 a 的一系列样本值 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 符合广义极值分布,其累积分布函数为

$$G(z) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi z)^{-1/\xi}] & z \in R, \xi \neq 0 \\ \exp[-\exp(-z)] & z \in R, \xi = 0 \end{cases} \quad (11)$$

概率密度分布函数为

$$g(z) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi z)^{-1/\xi}] \frac{1}{\sigma} (1 + \xi z)^{-1/\xi-1} & z \in R, \xi \neq 0 \\ \exp[-\exp(-z)] \frac{1}{\sigma} \exp(-z) & z \in R, \xi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中 $z = (a - \mu)/\sigma$, μ 为放大因子的位置参数, σ 为放大因子的尺度参数, ξ 为放大因子的形状参数。当 $\xi > 0$ 时,该函数为 Weibull 分布;当 $\xi < 0$ 时,该函数为 Gumbel 分布;当 $\xi = 0$ 时,该函数为 Fréchet 分布。广义极值分布即为这 3 种分布函数的统一形式。

1.3 最大响应分布模型参数估计

继续以广义极值分布为例,通过极大似然估计方法求解放大因子分布函数的未知参数 μ 、 σ 、 ξ 。当 $\xi \neq 0$ 时,未知参数的对数似然估计函数为

$$\ell(\mu, \sigma, \xi) = -m \lg \sigma - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^m \lg[1 + \xi(a_i - \mu)/\sigma] - \sum_{i=1}^m [1 + \xi(a_i - \mu)/\sigma]^{-1/\xi} \quad (13)$$

其中 m 为放大因子总个数, $1 + \xi[(a_i - \mu)/\sigma] > 0$ 。

当 $\xi = 0$ 时, μ 和 σ 的对数似然估计函数为

$$\ell(\mu, \sigma) = -m \lg \sigma - \sum_{i=1}^m [(a_i - \mu)/\sigma] - \sum_{i=1}^m e^{-(a_i - \mu)/\sigma} \quad (14)$$

再分别对未知参数求偏导,并令其等于零,得到关于 μ 、 σ 、 ξ 的似然方程组

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \xi} = 0 \quad (15)$$

当 $\xi = 0$ 时方程组 (式 (15)) 只有前两个方程。直接求解方程组 (式 (15)) 即可得到 μ 、 σ 、 ξ 的极大似然估计值。

2 最大响应的统计特性假设评估

2.1 最大响应分布假设检验

K-S 检验是一种重要的统计分布检验方法。用来检验失谐响应放大因子假设分布与理想分布是否不同。适用于大样本,寻找两分布的最大距离 D

$$D = \max_{a > 0} |S(a) - P(a)| \quad (16)$$

其中 $S(a)$ 和 $P(a)$ 分别为放大因子假设分布累

积分分布函数和理想分布累积分布函数。

2.2 最大响应分布检验的判定

在统计假设检验的 P 值^[21] 是一种概率,一种在原假设为真的前提下出现观察样本以及更极端情况的概率。其近似计算公式^[22] 为

$$P = Q_{KS} \left[\left(\sqrt{m} + 0.12 + 0.11 / \sqrt{m} \right) D \right]$$
(17)

Q_{KS} 定义如下:

$$Q_{KS} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{(-2j^2 a_D^2)} \quad (18)$$

其中 m 为放大因子总个数, a_D 为求得 D 所对应的放大因子数值。

计算出 P 值后,将其与给定的显著性水平 α (本文 $\alpha=0.05$) 比较。如果 $P<\alpha$,则在显著性水平 α 下拒绝原假设;如果 $P\geq\alpha$,则在显著性水平 α 下接受原假设。

3 数值结果

以某压气机 86 叶片叶盘为例,其有限元模型如图 1 所示。以 10 节点 187 单元划分网格,单个叶片共 56982 个节点,31062 个单元。叶盘材料弹性模量为 210 GPa,密度为 7800 kg/m³,泊松比为 0.3。

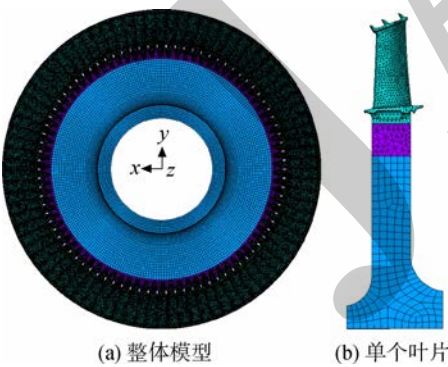


图 1 86 叶盘有限元模型

Fig. 1 Finite element model for 86 bladed disk

对于谐调叶盘,通过循环对称分析,得到频率与节径关系如图 2 所示,图中给出了频率范围为 0~30 kHz 内所有谐波,图中不同类型曲线代表不同模式族的特性曲线,其中横坐标为节径数,纵坐标为频率。本文选取了 2 倍、3 倍、7 倍、11 倍、22 倍和 30 倍激励阶次(分别记为 2EO、3EO、7EO、11EO、22EO 和 30EO)下的几个高低频段作为分析算例,已在图中采用红色区域标出,例如 7 节径下选取了第 1 阶模态,频率范围是 1180~1350 Hz。

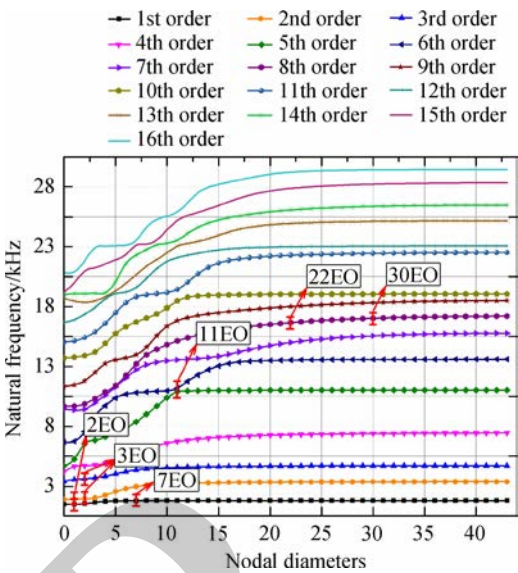
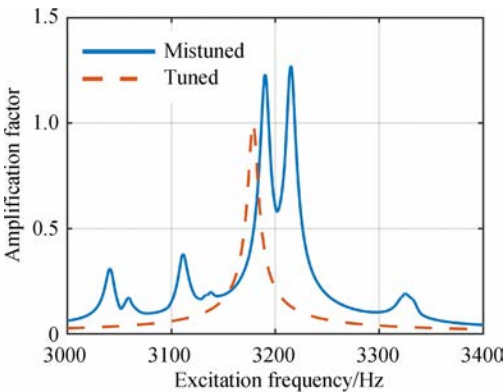


图 2 谐调叶盘固有模态特性图

Fig. 2 Natural modal characteristic diagram of tuned bladed disk

针对一组均匀分布失谐参数形式,其值的变化范围是从-0.05~0.05。分析了在不同激励阶次下不同频率段的失谐叶盘的振动特性。图 3 中给出了激励阶次为 3EO、7EO、11EO 和 30EO 下的不同频段的失谐响应放大因子分布图,图中横坐标为激励频率,纵坐标为放大因子。从图 3 中可以看到叶片失谐导致叶盘结构的最大响应幅值较谐调时有明显的增大,例如激励阶次为 11EO 时,放大因子为 2.35。随着激励阶次的增大,更多的模态被激励出来,大大扩大了共振区域。

对随机抽取的 10 000 组均匀分布失谐形式进行蒙特卡洛模拟响应分析,可得到 10 000 个最大响应放大因子,并采用统计学分布函数以及极大似然估计对其进行拟合结果如图 4 所示。主要采用以下 7 种分布函数:①三参数威布尔分布(3p-Weibull);②伽马分布(Gamma);③极值分布(extreme value);④广义极值分布(GEV);⑤对



(a) 3EO (第3阶模态)

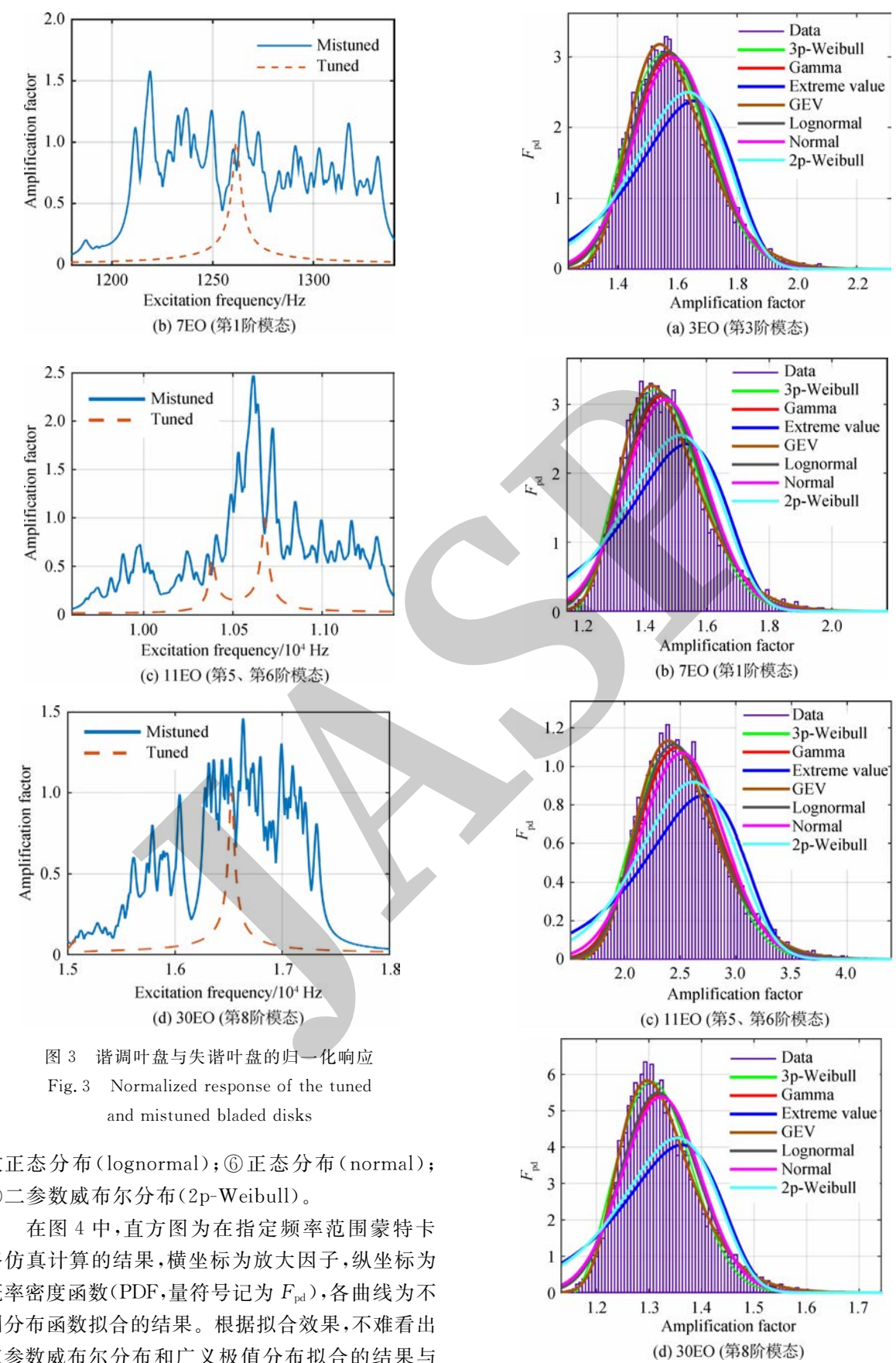


图 3 谐调叶盘与失谐叶盘的归一化响应
Fig. 3 Normalized response of the tuned and mistuned bladed disks

数正态分布(lognormal);⑥正态分布(normal);
⑦二参数威布尔分布(2p-Weibull)。

在图 4 中,直方图为在指定频率范围蒙特卡洛仿真计算的结果,横坐标为放大因子,纵坐标为概率密度函数(PDF,量符号记为 F_{pd}),各曲线为不同分布函数拟合的结果。根据拟合效果,不难看出三参数威布尔分布和广义极值分布拟合的结果与样本数据更为贴近,但在分布的两端三参数威布尔分布拟合效果却不如广义极值分布拟合的精确。

结合表 1 中 K-S 检验结果可以看出,对于

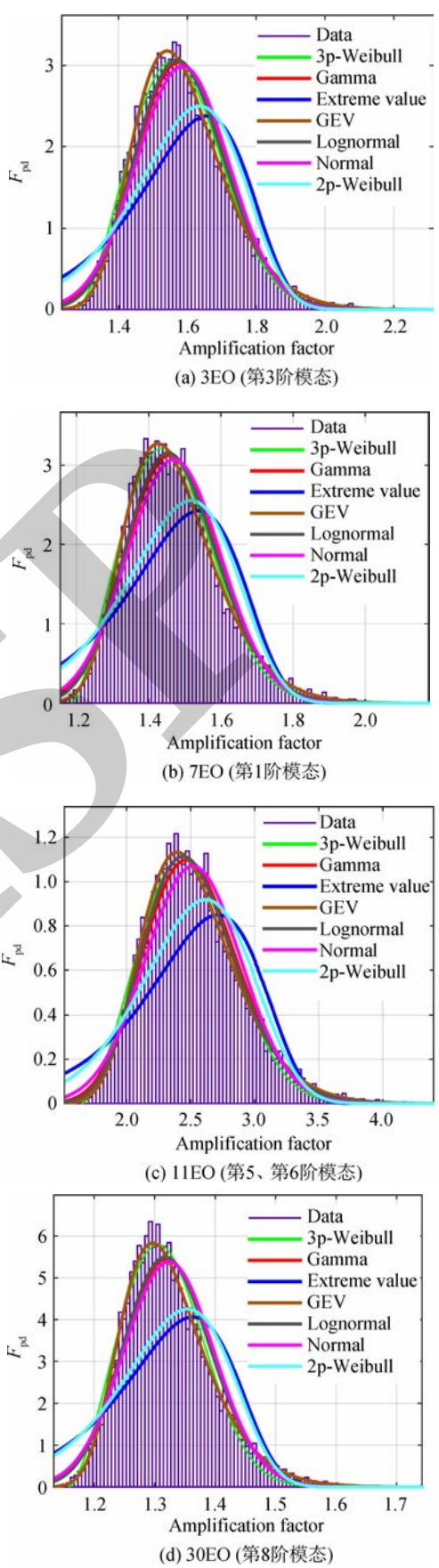


图 4 各分布函数拟合结果对比
Fig. 4 Comparing the approximate results of different distribution functions

表 1 放大因子分布假设检验的 P 值

Table 1 P -value for hypothesis testing of amplification factor

激励阶次	模态阶数	广义极值分布	极值分布	三参数威布尔分布	二参数威布尔分布	正态分布	对数正态分布	伽马分布
2	第 1 阶	7.63×10^{-6}	7.47×10^{-136}	1.23×10^{-15}	3.64×10^{-102}	4.48×10^{-46}	7.64×10^{-34}	8.66×10^{-38}
2	第 2 阶	0.23	3.06×10^{-89}	0.11	1.07×10^{-51}	3.90×10^{-11}	2.43×10^{-4}	2.80×10^{-6}
3	第 2 阶	1.01×10^{-4}	2.17×10^{-107}	1.83×10^{-11}	1.19×10^{-70}	3.72×10^{-82}	6.01×10^{-24}	3.28×10^{-27}
3	第 3 阶	0.60	1.62×10^{-127}	1.45×10^{-4}	2.97×10^{-77}	3.03×10^{-17}	8.02×10^{-7}	9.66×10^{-10}
7	第 1 阶	0.76	6.25×10^{-128}	3.15×10^{-5}	4.03×10^{-76}	3.73×10^{-17}	1.81×10^{-7}	2.96×10^{-10}
11	第 5、第 6 阶	0.95	1.20×10^{-124}	4.89×10^{-8}	5.33×10^{-52}	2.85×10^{-16}	1.83×10^{-2}	1.63×10^{-5}
22	第 8 阶	0.25	1.18×10^{-254}	1.06×10^{-19}	1.66×10^{-142}	1.08×10^{-42}	7.19×10^{-20}	1.72×10^{-26}
30	第 8 阶	0.72	2.40×10^{-164}	1.21×10^{-11}	2.65×10^{-118}	2.89×10^{-27}	2.00×10^{-17}	1.75×10^{-20}

注:加粗的数值代表该分布假设被接受。

2EO 第 1 阶模态和 3EO 第 2 阶模态,虽然放大因子不符合广义极值分布,但是广义极值分布拟合的效果比其他分布函数都好;对于 2EO 第 2 阶模态,放大因子既服从广义极值分布,也服从三参数威布尔分布,但是采用广义极值分布拟合精度更高;对于其他激励阶次,放大因子均服从广义极值分布,且 P 值最大可达 0.95,说明广义极值分布对放大因子拟合效果很好。相比于极值分布、二参数威布尔分布、正态分布等两参数分布函数,放大因子分布更接近三参数分布形式,且最为接近广义极值分布。

4 结 论

本文基于高保真有限元减缩模型,分析了随机失谐对叶盘结构的影响。并进行了大量的失谐响应计算,研究了失谐叶盘的最大响应分布情况。分析了均匀分布失谐形式下叶盘结构的振动特性。运用了极值理论与极大似然估计方法对失谐响应放大因子统计特性进行研究,主要采用广义极值分布,极值分布,三参数威布尔分布,二参数威布尔分布,正态分布,对数正态分布,伽马分布对放大因子进行统计学建模并求解。最终,通过对比各分布函数拟合效果以及 K-S 检验结果,说明对失谐叶盘最大响应统计特性描述最好的分布函数是广义极值分布,它更优于常用的三参数威布尔分布的描述。因此,采用广义极值分布能更准确地描述失谐叶盘动力响应的统计特性。

参考文献:

[1] CASTANIER M P, PIERRE C. Modeling and analysis of

mistuned bladed disk vibration. current status and emerging directions[J]. Journal of Propulsion and Power, 2006, 22(2):384-396.

[2] ZANG Chaoping, LAN Haiqiang. Advances in research vibration problem of mistuned blisk assemblies[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2011, 2(2):133-142.

[3] PIERRE C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(3):485-502.

[4] 廖海涛, 王帅, 王建军, 等. 失谐叶盘结构振动响应局部化实验研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(1):29-34.

LIAO Haitao, WANG Shuai, WANG Jianjun, et al. Tests for forced response localization of a mistuned bladed disk assembly[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(1):29-34. (in Chinese)

[5] PETROV E P, EWINS D J. Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk assemblies[J]. Journal of Turbomachinery, 2003, 125(4):623-631.

[6] TAN Yuanqiu, ZANG Chaoping, ZHOU Biao, et al. Sensitivity analysis of high-frequency forced response for mistuned bladed disks based on high-fidelity models[R]. ASME Paper GT2016-57690, 2016.

[7] 王建军, 于长波, 姚建尧, 等. 失谐叶盘振动模式局部化定量描述方法[J]. 推进技术, 2009, 30(4):457-461, 473.

WANG Jianjun, YU Changbo, YAO Jianyao, et al. Vibratory mode localization factors of mistuned bladed disk assemblies[J]. Journal of Propulsion Technology, 2009, 30(4):457-461, 473. (in Chinese)

[8] SINHA A, CHEN S. A higher order technique to compute the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(2):207-221.

[9] SINHA A. Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly[J]. AIAA Journal, 1986, 24(11):1797-1801.

[10] SINHA A. Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos [R]. ASME Paper GT-2003-38961, 2003.

[11] CASTANIER M P, PIERRE C. Consideration on the benefits of intentional blade mistuning for the forced response of turbomachinery rotors [R]. New York: ASME Aerospace Division, 1997.

[12] MIGNOLET M P, RIVAS-GUERRA A, LABORDE B H. Towards a comprehensive direct prediction strategy of the effects of mistuning on the forced response of turbomachinery blades [J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 1999, 71(5): 462-469.

[13] MIGNOLET M P, LIN C C, LABORDE B H. A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2000, 123(2): 388-394.

[14] SINHA A. Statistical distribution of the peak maximum amplitude of the forced response of a mistuned bladed disk: some investigations and applications of neural networks [R]. ASME Paper GT2006-90088, 2006.

[15] AYERS J P, FEINER D M, GRIFFIN J H. A reduced-order model for transient analysis of bladed disk forced response [J]. Journal of Turbomachinery, 2005, 128(3): 466-473.

[16] DUAN Yongliang, ZANG Chaoping, PETROV E P, et al. Forced response analysis of high-mode vibrations for mistuned bladed disks with effective reduced-order models [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2016, 138(11): 112502. 1-112502. 12.

[17] BLADH R, PIERRE C, CASTANIER M P, et al. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2002, 124(2): 311-324.

[18] CHAN Y J, EWINS D J. A comprehensive procedure to estimate the probability of extreme vibration levels due to mistuning [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2010, 132(11): 112505. 1-112505. 8.

[19] COLES S. An introduction to statistical modeling of extreme values [M]. Berlin: Springer, 2008.

[20] FARNOOSH A, MALIHE E, ABOLGHADEM B. Estimations of maximal generalized extreme value distribution parameters and modeling of extreme wind speeds in zaheden city [J]. Journal of Andrology, 2016, 32(3): 232-239.

[21] REGINA N. Scientific method: statistical errors [J]. Nature, 2014, 506(7487): 150-152.

[22] STEPHENS M A. Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises and related statistics without extensive tables [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1970, 32(1): 115-122.

(编辑:王碧琚)